Clase 8

Flujo Eléctrico y ley de Gauss

Flujo eléctrico

El signo del flujo eléctrico

Por su definición el flujo eléctrico a través de una cierta superficie puede ser positivo, negativo o nulo. De hecho las contribuciones al flujo de distintas partes de la superficie pueden tener cualquiera de los signos dependiendo del ángulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{S}}$. Cuando éste ángulo es agudo la contribución es positiva, cuando es recto no hay contribución y cuando el ángulo es grave la contribución es negativa.

Ejemplo 14: Cálculo del flujo eléctrico de una carga puntual a través de una superficie circular.

Tenemos una carga puntual q y queremos calcular el flujo eléctrico a través de un disco de radio R que se encuentra a una altura H encima de la carga. El disco es perpendicular a la línea que une a la carga con su centro.

Escogemos un sistema de coordenadas con la carga en el origen y el eje z pasando por el centro del disco. Usando coordenadas cilíndricas tenemos que los puntos del disco se parametrizan en como $\vec{\mathbf{r}'} = r_\rho cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + r_\rho sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + H\hat{\mathbf{z}}$. Como ya hemos visto el elemento de superficie será $d\vec{\mathbf{S}} = r_\rho dr_\rho d\varphi$. El campo eléctrico en el punto $\vec{\mathbf{r}}'$ es:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{r}'}}{|\vec{\mathbf{r}}'|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_\rho cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + r_\rho sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + H\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(r_\rho^2 + H^2)^3}}$$

El flujo del campo eléctrico resulta ser

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \int_S \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}'}).\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{Hr_\rho dr_\rho d\varphi}{\sqrt{(r_\rho^2 + H^2)^3}} \\ &= -\frac{qH}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(r_\rho^2 + H^2)}}\Bigg|_0^R = \frac{q}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right]\end{aligned}$$

Observamos que cuando el radio tiende a infinito, el disco tiende a un plano y el flujo tiende a $q/(2\epsilon_0)$. Si consideramos la superficie cerrada formada dos planos paralelos y las tapas laterales en infinito el flujo por las tapas es despreciable y el flujo por cada plano es la mitad de la carga dividida por ϵ_0.

Ley de Gauss

Hemos visto que el flujo del campo eléctrico de una carga puntual a través de una superficie esférica de radio R no depende del radio. Si consideramos una superficie no esférica con elemento de superficie dS podemos apreciar que la proyección de ese elemento de superficie sobre la superficie esférica que pasa por ese punto cumple que $dS = dS_e cos(\alpha)$ donde dS_e es el elemento de superficie de la superficie esférica. Entonces se cumple que

$$\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dS}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r'}}).\vec{\mathbf{dS}}_e$$

El flujo del campo eléctrico de una carga puntual q a través de cualquier superficie que la envuelva es entonces

$$\Phi_S = \int_S \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dS}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

El flujo producido por una carga externa a una superficie cerrada puede verse que es cero pues las contrbuciones de las partes en que el campo electrico es entrante se canceln con aquellas en que el campo es saliente.

<u>Principio de superposición</u>

Por el principio de superposición si tenemos un sistema de n cargas q_i y consideramos una superficie que las envuelve el flujo del campo eléctrico cumple

$$\Phi_S = \int_S (\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i).\vec{\mathbf{dS}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\epsilon_0}$$

Es decir el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga contenida en la superficie dividida por ϵ_0. En el caso en que se hallen presentes distribuciones contínuas de carta ellas deben ser consideradas tambien al calcular la carga neta.

<u>Ley de Gauss y superficies abiertas.</u>

Una consecuencia evidente de la Ley de Gauss es que si la carga neta contenida en una superficie cerrada es nula el flujo también es nulo y viceversa. Entonces si consideramos una superficie cerrada que no contiene carga formada por dos partes podemos asegurar el flujo por una de las partes es el negativo del flujo a través de la otra parte. Esta observación es útil a veces para calcular el flujo a través de superficies complicadas.

Ejemplo 15: Cálculo del flujo eléctrico a través de una malla de forma arbitraria con base circular.

Consideramos una superficie con la forma de una malla de cazar mariposas (o un colador de limpiar piscinas) soportada por un circulo de radio R, colocada en una región donde el campo es uniforme. Podemos calcular el flujo a través de la parte de forma irregular como el negativo del flujo a través del la superficie circular que sirve de soporte. En el caso en que este circulo sea perpendicular al campo el resultado es $\Phi_S = \pi R^2 |\vec{\mathbf{E}}|$.

Ejemplo 16 Cálculo del flujo del campo de una carga puntual por una superficie cuadrada de lado a que se encuentra a una distancia $a/2$ encima de la carga.

Aquí podemos usar una forma un poco mas elaborada de la observación anterior y darnos cuenta que si consideramos un cubo de lado a centrado en la carga por consideraciones de simetría el flujo por cada una de las caras es igual. Entonces el flujo por cada cara es un sexto del flujo total. Por la Ley de Gauss el flujo total es q/ϵ_0 de donde el flujo por la superficie considerada es $q/(6\epsilon_0)$.

Cálculo del campo eléctrico usando la Ley de Gauss

Para configuraciones de carga con suficiente simetría se puede utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico. Para ello es necesario que podamos escoger superficies gaussianas tales el campo eléctrico de la configuración sea perpendicular a ellas y tenga módulo constante. En ese caso el flujo de campo eléctrico es igual al módulo del campo eléctrico por el área de la superficie gaussiana. Si somos capaces de determinar la carga encerrada en la superficie podremos despejar el valor del módulo del campo eléctrico. Veamos como funciona esto en los casos en que se tiene simetría esférica, cilíndrica o rectangular.

Simetría esférica

Un sistema tiene simetría esférica si podemos escoger un sistema de referencia tal que el campo eléctrico en un punto $\vec{\mathbf{r}}$ con respecto a ese sistema tenga la forma $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$ donde r es la distancia del punto al origen y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección radial.

Ejemplo 17 Calcular en cualquier punto del espacio el campo eléctrico producido por una distribución esférica de radio R con densidad de carga constante y carga total Q.

La densidad de carga vale $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$. Consideramos separadamente los puntos con $r > R$ y aquellos con $r < R$. En ambos casos escogemos superficies gaussianas esféricas de radio r. El campo eléctrico claramente tiene simetría esférica. El flujo eléctrico a través de la superficie escogida vale $\Phi = E(r)4\pi r^2$. Para $r > R$ la carga contenida en la superficie gaussiana es la carga total Q de la configuración. Usando la ley de Gauss tenemos la igualdad $E(r)4\pi r^2 = Q/\epsilon_0$. El campo eléctrico fuera de la esfera de radio R vale entonces

$$\vec{\mathbf{E}} = E(r)\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Cuando $r < R$ la carga contenida en la superficie gaussiana es

$$\int_S (r)\rho dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho r^2 dr d\theta d\phi = 4\pi\frac{3Q}{4\pi R^3}\frac{r^3}{3} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Usando la Ley de Gauss tenemos la igualdad $E(r)4\pi r^2 = Q\frac{r^3}{\epsilon_0 R^3}$. Por lo tanto para $r < R$ tenemos,

$$\vec{\mathbf{E}} = E(r)\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

Observamos que el campo dentro de la esfera crece linealmente con la distancia al centro y que es continuo en la superficie $r = R$.

Simetría cilíndrica

Un sistema tiene simetría cilíndrica si podemos escoger un sistema de referencia tal que el campo eléctrico en un punto $\vec{\mathbf{r}}$ con respecto a ese sistema tenga la forma $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = E(r_\rho)\hat{\mathbf{r}_\rho}$ donde r_ρ es la distancia del punto al eje de simetría y $\hat{\mathbf{r}_\rho}$ es el vector unitario en la dirección radial definida sobre los planos perpendiculares a dicho eje. Por conveniencia escogemos que el eje z sea el eje de simetría y entonces los planos perpendiculares son paralelos al plano xy.

Ejemplo 18 Calcular en cualquier punto del espacio el campo eléctrico producido por una distribución cilíndrica (muy larga) de radio R con densidad de carga constante.

Tomamos el caso ideal en que la distribución es infinita. Entonces el sistema tiene simetría cilíndrica. Escogemos como superficies gaussianas cilindros de altura H y radio r_ρ. El flujo a traves de las tapas del cilindro es nulo ya que el campo es paralelo a las tapas. El flujo a través de la superficie cilíndrica es el área por el módulo del campo $\Phi_{S(r)} = E(r_\rho)H2\pi r_\rho$. para $r_rho > R$ la carga contenida en la superficie es ρ por el volumen de un corte de altura H de la distribución de carga. Entonces por la ley de gauss,

$$E(r_\rho)H2\pi r_\rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}H\pi R^2 \quad \Longrightarrow, \quad E(r_\rho) = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 r_\rho}$$

Cuando $r_\rho < R$ la carga contenida es la densidad ρ por el volúmen de un cilindro de radio r_ρ y altura H. Tenemos

$$E(r_\rho)H2\pi r_\rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}H\pi r_\rho^2 \;\Longrightarrow, \quad E(r_\rho) = \frac{\rho r_\rho}{2\epsilon_0}$$

Simetría rectangular

Diremos que el campo eléctrico tiene simetría rectangular cuando toma valores constantes sobre planos a los cuales es perpendicular.

Ejemplo 19 Cálculo del campo eléctrico producido por un plano cargado con densidad de carga $\sigma > 0$ constante.

Escogemos el sistema de referencia en el cual el plano cargado coincide con el plano xy. Por la simetría del problema nos damos cuenta que el campo eléctrico debe tener la forma

$$\vec{\mathbf{E}}(z) = \frac{z}{|z|}E(|z|)\hat{\mathbf{z}} \quad , \quad E(|z|) > 0 \quad .$$

El factor $z/|z|$ simplemente es un signo que cambia la dirección del campo segun estemos arriba o abajo del plano. Escogemos como superficie gaussiana un cilindro perpendicular al plano cuyas tapas tienen área A. El flujo a través de la superficie cilíndrica se anula porque el campo es paralelo a la misma. El flujo por las tapas es $\Phi = 2AE(|z|)$. Aplicando la ley de Gauss,

$$2AE(|z|) = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \implies, \quad E(|z|) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Corroboramos el resultado encontrado anteriormente que el campo eléctrico es constante sobre el plano. Si la densidad de carga es negativa el análisis es igual invirtiendo la dirección de los campos. Podemos entonces escribir cualquiera sea el signo de σ,

$$\vec{\mathbf{E}}(z) = \frac{z}{|z|}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \quad .$$